Comment asservir une base roulante dans un espace avec obstacles?

Justin Cano

École Centrale de Marseille
Club Robotique E-Gab

justin.cano@centaliens-marseille.fr

V2 – 14 novembre 2020.
Partie I - Asservissement d'une roue

Sommaire

Contenu de la section

Qui suis-je ?

Une personne âgée.

FIGURE – Il y a bien longtemps quand je ne portais ni barbe ni dentier.

- Ancien membre de E-Gab 2015-2016 [1], ex-fablabiste et CIA.
- Centralien (thx captain obvious), DD Polytechnique Montréal
- Actuellement en cotutelle Poly Mtl - ISAE/Supaéro
- Sujet : localisation et déploiement de robots.
- Mais aussi chargé de laboratoire en Automatique à mes heures perdues.

1. Du temps où E-Gab était une monarchie.

Petit tour de table (ou d'écran)

Presentez vous [2] à votre tour !

2. en 140 caractères.

Contenu de la section

1. Présentation
2. Rappels sur l'automatique
   - Automatique des systèmes linéaires
   - Automatique numérique, discrète
3. Modéliser un moteur ?
4. Contrôleur PI
5. Script Matlab

Principe général

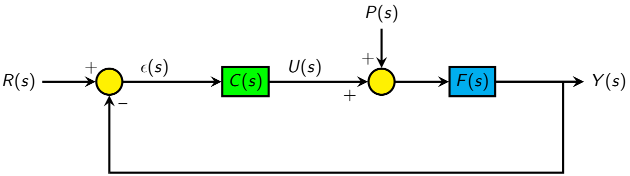


FIGURE – Schéma-blocs générique d'un système linéaire SISO perturbé à retour unitaire.

Remarque : Je note s la transformée de Laplace (convention $\mathbb{R}-\mathcal{FRANCE}$)

Qu'est-ce que la transformée de Laplace ?

Mathématiquement, une transformée de Laplace d'une fonction est définie de la façon suivante :

$$\mathcal{L}(f(t)) := F(s) = \int_{t=0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \quad (1)$$

Où :

- s est une **variable complexe** dite **variable de Laplace**. On décompose s de la façon suivante :

$$s = \sigma + j\omega, \quad \sigma, \omega \in \mathbb{R} \quad j \in \mathbb{C}, \ j^2 = -1$$

- f est une **fonction temporelle** causale.
- C'est une opération qui s'applique sur toute une fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ afin de générer une autre fonction, appelée transformée $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Un exemple ?

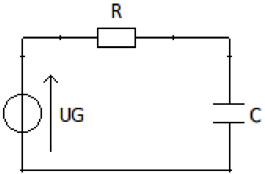


FIGURE – Circuit RC série

$$U_G(t) = RI(t) + U_C(t) = RC\frac{dU_c}{dt} + U_C$$

On va considérer nos variables d'entrée et de sortie du système :

- Entrée : Tension aux bornes du générateur $u(t) = U_G(t)$.
- Sortie : Tension aux bornes du condensateur $y(t) = U_C(t)$.

On transforme l'équation différentielle dans le domaine Laplace dans les conditions d'Heavyside et on obtient :

$$U(s) = (RCs + 1)Y(s) \Leftrightarrow F(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{1}{1 + RCs}$$

Laplace, acte I

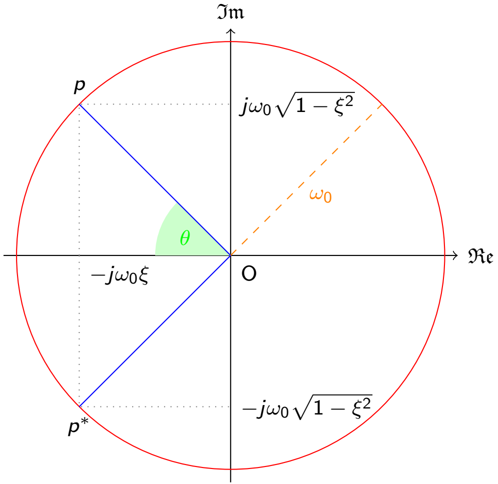
$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Où N, D sont des polynômes en s.

- Les pôles p_i sont les valeurs de s pour lesquelles $D(s) = 0$.
- Les zéros z_i sont les valeurs de s pour lesquelles $N(s) = 0$.

$$Re(p_i) < 0 \Leftrightarrow STABILITE$$

Laplace, acte II



$$H(s) = \frac{K}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}s+\frac{s^2}{\omega_0^2}}$$

FIGURE – Le plan de Laplace, système d'ordre deux.

Laplace, acte III

$$H(s) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}s + \frac{s^2}{\omega_0^2}}$$

- Oscillations :

$$cos(\theta) = \xi \tag{2}$$

De plus,on a la relation suivante entre le facteur d'amortissement ξ et le pourcentage de dépassement maximum P_{OS}.

$$\xi = \ln\left(\frac{100}{P_{OS}}\right) \times \frac{1}{\sqrt{\pi^2 + ln^2(\frac{100}{P_{OS}})}} \tag{3}$$

- Rapidité :
La rapidité d'un système est donnée par la relation approximative suivante [3] :

$$T_5 \approx \frac{3}{\omega_0 \xi} \tag{4}$$

3. En supposant que $\xi < 0.9$.

Échantillonnage de signaux

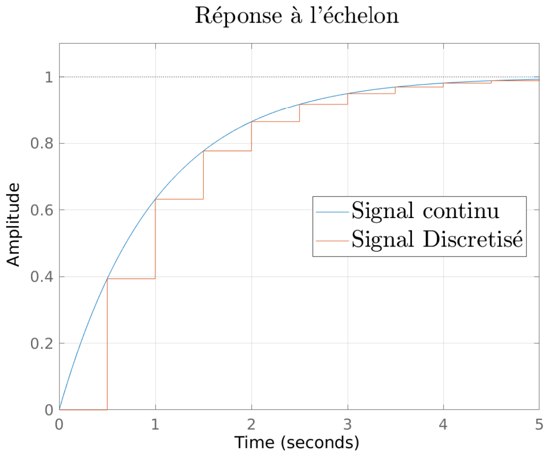


FIGURE – Signal bloqué à l'ordre zéro.

Théorème de Shannon

Pas de pertes $\Leftrightarrow f_e > 2 \times max(f_{pole})$

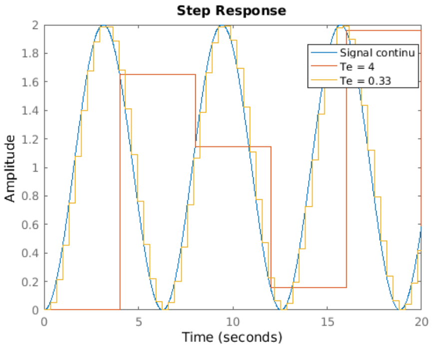


FIGURE – Illustration de l'importance de l'échantillonnage.

Transformée en Z (Laplace discrète)

Pour tout système causal, elle vaut :

$$Z(u(nT_e)) = U(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u(nTe) \times z^{-n} \qquad z \in \mathbb{C} \tag{5}$$

- Calcul sous `Matlab` : utiliser la fonction *c2d* (continuous to discrete) que demande la période d'échantillonnage en plus de la fonction continue du système à discrétiser.

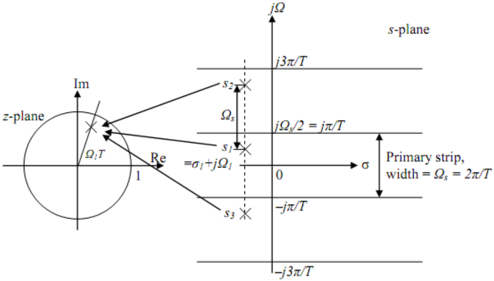


FIGURE – Équivalence entre Laplace et Z.

- Stabilité : Le critère de Cauchy sur les séries entières s'applique ici. Un système est stable si et seulement si ses pôles (valeurs critiques) appartiennent au cercle unitaire. Autrement dit :

$$|p_i| < 1$$

Théorème du retard

Soit un signal $u(n)$, la transformée d'un signal retardé de k fois le temps d'échantillonnage en Z vaut :

$$Z(u(n - kT_e)) = z^{-k} Z(u(n))$$

C'est pour cela que l'on utilise la transformée en Z, on peut déterminer une équation de récurrence facilement à partir de cette dernière

Contenu de la section

Modélisation du moteur I

- $\omega(t)$ vitesse de sortie du moteur
- $C(t)$ couple fourni par le moteur
- $\imath(t)$ intensité traversant le bobinage du moteur
- L, R, e Inductance, Résistance et force contre-électromotrice du moteur
- J, f Moment d'inertie et coefficient de frottement sec du moteur

Équations dynamiques :

1. $u(t) = L\frac{di}{dt} + Ri(t) + e,\ \tau_e = \frac{L}{R}$ *Équation électrique*
2. $e(t) = \Phi\omega(t)$ et $C(t) = \Phi i(t)$ *Équations magnétique*
3. $J\frac{d\omega}{dt} = -f\omega(t) + C(t),\ \tau_m = \frac{J}{f}$ *Équation mécanique*

Modélisation du moteur II

$$
\begin{aligned}
U(s) &= (\tau_e s + 1) R I(s) + e = (\tau_e s + 1)\frac{R}{\Phi} C(s) + \Phi\Omega(s) \\
&= (\tau_e s + 1)(\tau_m s + 1)\frac{Rf}{\Phi}\Omega(s) + \Phi\Omega(s). \qquad (6)
\end{aligned}
$$

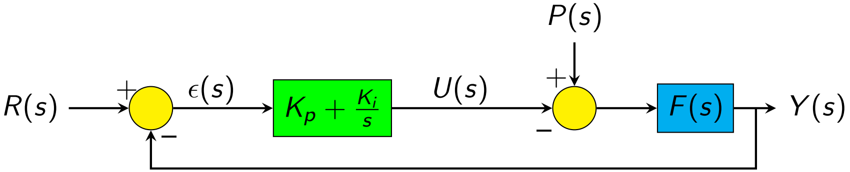
$$
\Leftrightarrow \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{1}{(\tau_e s + 1)(\tau_m s + 1)\frac{Rf}{\Phi} + \Phi} = \frac{\frac{\Phi}{Rf}}{\tau_e \tau_m s^2 + (\tau_e + \tau_m)s + \frac{\Phi^2}{Rf}}. \qquad (7)
$$

En approximant $\tau_e << 1$, on obtient :

$$
F(s) \approx \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{K}{s\tau + 1}
$$

Contenu de la section

Contrôleur PI ?



$$u(t) = K_i \int \epsilon(\tau) d\tau + K_p \epsilon(t) \text{ où } \epsilon(t) = \Omega_{desiree} - \Omega_{mesuree} = R(t) - Y(t)$$

En Laplace :

$$C(s) = \frac{U(s)}{\epsilon(s)} = \frac{K_i}{s} + K_p$$

- <u>Avantages :</u> Erreurs nulles en rejet de perturbation et suivi pour des échelons (constantes).
- <u>Inconvénients :</u> Le système peut être lent ou instable... attention au choix des coeffs ! Introduction d'un zéro.

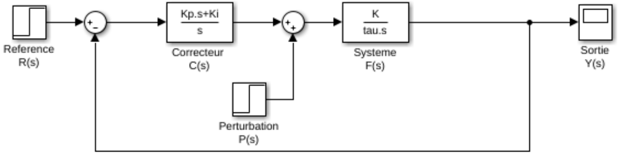


FIGURE – Système global.

Ce dernier donne :

$$H(s) = \frac{KK_p(s + \frac{K_i}{K_p})}{s^2 + \frac{1+KK_p}{\tau}s + \frac{KK_i}{\tau}} \tag{8}$$

Tiens, deux pôles dépendant de deux gains... intéressant !

Choix des pôles

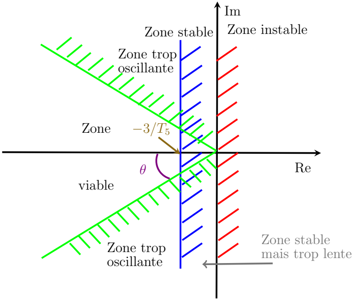


FIGURE – Illustration.

On se fixe des performances :

$$T_{5\%} \leq 0.5 \text{ s} \quad \& \quad P_{OS} \leq 5 \Leftrightarrow \xi \geq 0.69 \tag{9}$$

Les pôles $p_{1,2} = -6 \pm 6j$ conviennent pour respecter ce cahier des charges.

Calcul des gains

Que vaut le dénominateur de la fonction de transfert que l'on veut ?

$$D(s) = (s - p_1)(s - p_2) = (s + 6 + 6j)(s + 6 - 6j) = s^2 + 12s + 72$$

On suppose $K = 40$ et $\tau = 0.3\ s$, ces coefficients doivent être identifiés pour chaque moteur.
Deux relations avec les deux gains pour deux coefficients polynomiaux :

$$12 = \frac{1 + KK_p}{\tau} \Leftrightarrow K_p = \frac{12\tau - 1}{K} \approx 0.065$$
$$72 = \frac{KK_i}{\tau} \Leftrightarrow K_i = \frac{72\tau}{K} \approx 0.54$$

... qui donne un zéro qui n'est pas négligeable $-K_i/K_p \approx -8.3$, si on a un dépassement différent, ce sera de sa faute. Mais est-ce dramatique ? Suspense.

Simulation en continu

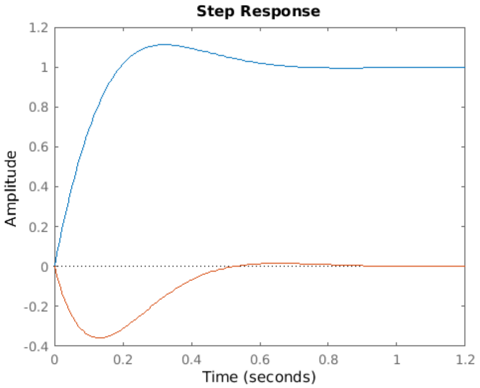


FIGURE – Test en boucle fermée du système corrigé sur `Matlab`

Rouge : rejet de perturbation. Bleu : Poursuite d'un échelon unitaire.

Exemple de discrétisation sous Matlab

En utilisant `c2d` (voir script), on obtient les équations en Z suivantes :

```
F =

     40
  ---------
  0.3 s + 1

Continuous-time transfer function.


C =

  0.065 s + 0.54
  --------------
        s

Continuous-time transfer function.


C_e =

  0.065 z - 0.038
  ---------------
       z - 1

Sample time: 0.05 seconds
```

Obtention de l'équation de récurrence :

$$C_e(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{0.065z - 0.038}{z - 1} = \frac{0.065 - 0.038z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

On a donc l'équation :

$$U(z)(1 - z^{-1}) = E(z)(0.065 - 0.038z^{-1})$$

Le théorème du retard nous donne (la transformée en Z étant linéaire) :

$$U(n) - U(n - Te) = 0.065E(n) - 0.038E(n - Te)$$

Une équation de récurrence peut donc être trouvée en notant les signaux comme suit : $X_{n-k} = X(n - kT_e)$

$$U_n = U_{n-1} + 0.065E_n - 0.038E_{n-1}$$

Cette équation est implémentable en C (ou autre) ! !

Contenu de la section

Exemple sur Matlab

À vos claviers.