Algèbre des schémas-blocs

Justin Cano

16 juillet 2020

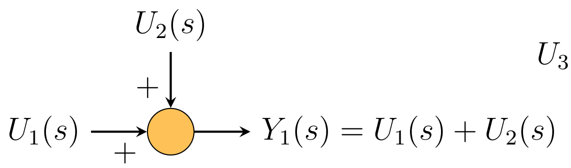
1 Opérations élémentaires

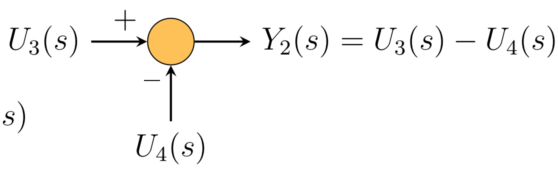
1.1 Blocs et opérandes

Un **bloc** est défini par le triplet *signal d'entrée* $U(t)$, *signal de sortie* $Y(s)$ et *fonction de transfert* $F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$. Comme suit :

$$U(s) \longrightarrow \boxed{F(s)} \longrightarrow Y(s)$$

Les **sommateurs** et **soustracteurs** sont définis comme suit :



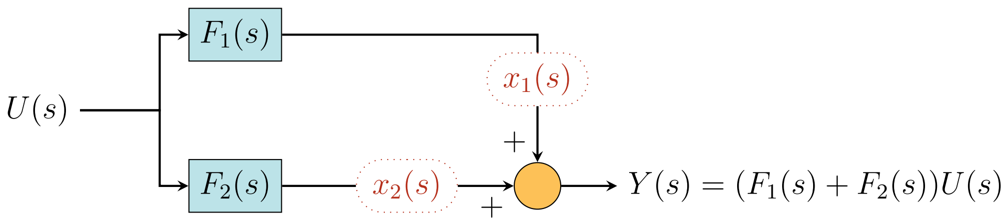


notons que nous ferons souvent abstraction des signes $+$ pour les sommateurs (à défaut de marquage ce sont des sommes).

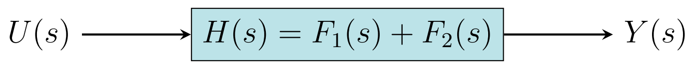
Note : Suivant la littérature, les sommateurs se notent parfois avec le symbole qui suit : $\otimes$. Les soustracteurs peuvent utiliser le même symbole précisant le signe ≪$-$≫ sur l'entrée ou les entrées soustractrices. Alternativement, on peut voir le signe ≪$-$≫ remplacé ou adjoint d'une partie du symbole noircie : .

1.2 Blocs en parallèle

Soient deux fonctions de transfert sommées en parallèle. En introduisant en rouge des signaux intermédiaires pour mieux illustrer, on trouve :

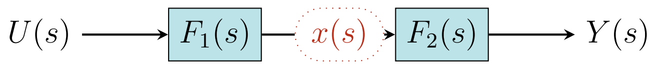


ce qui équivaut strictement à un unique bloc $H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ de valeur :



1.3 Blocs en série

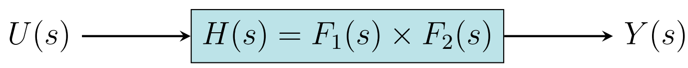
Dans le cadre de blocs en série, nous avons :



ce qui nous donne les équations suivantes :

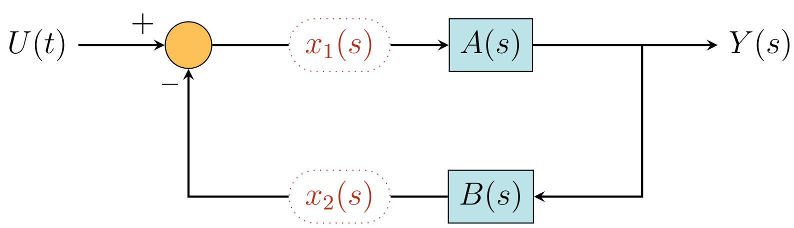
$$\begin{cases} x(s) = F_1(s)U(s) \\ Y(s) = F_2(s)X(s) \end{cases} \Rightarrow Y(s) = F_1(s)F_2(s)U(s)$$

donc les blocs équivalent à un bloc unique $H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ de valeur :



2 Boucles

Soit le système bouclé suivant :



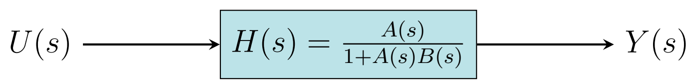
Nous avons en lisant le schéma les équations qui suivent :

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= A(s)x_1(s) \quad (a)\\
x_2(s) &= B(s)Y(s) \quad (b)\\
x_1(s) &= -x_2(s) + U(s) \quad (b')
\end{aligned}
$$

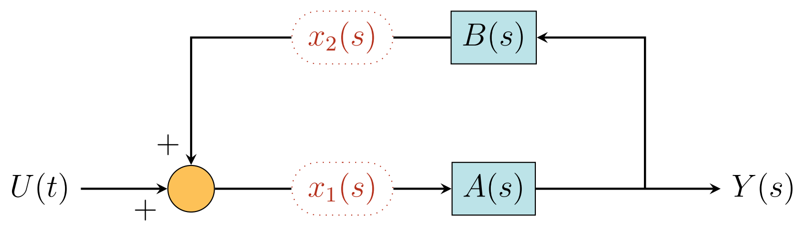
Nous en déduisons la fonction de transfert en boucle fermée

$$
\begin{aligned}
(b) \oplus (b') \Rightarrow x_1(s) &= -B(s)Y(s) + U(s) \quad (c)\\
(c) \oplus (a) \Rightarrow Y(s) &= -A(s)B(s)Y(s) + A(s)U(s) \quad (d)\\
(d) \Leftrightarrow (1 + A(s)B(s))Y(s) &= A(s)U(s)\\
\Leftrightarrow H(s) := \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{A(s)}{1 + A(s)B(s)}. \quad \square
\end{aligned}
$$

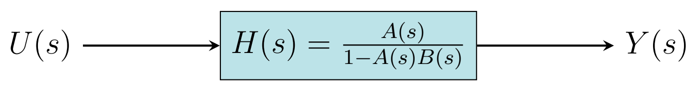
On a donc le schéma-bloc équivalent qui suit :



De même pour le sommateur qui suit :



On a le schéma équivalent suivant :

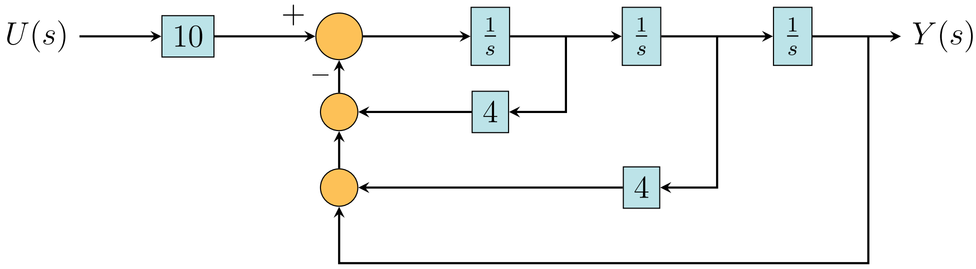


en effet, on a dans ce cas un changement de signe dans l'équation de départ (b') qui viendra introduire le signe moins :

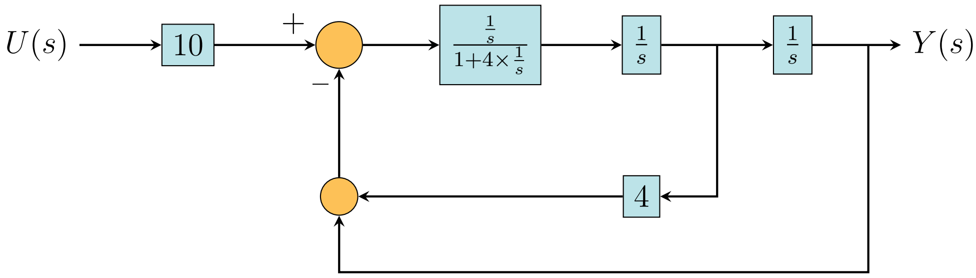
$$x_1(s) = +x_2(s) + U(s) \quad (b').$$

3 Un exemple résolu de réduction de schéma-blocs

On souhaite réduire le schéma-blocs suivant :

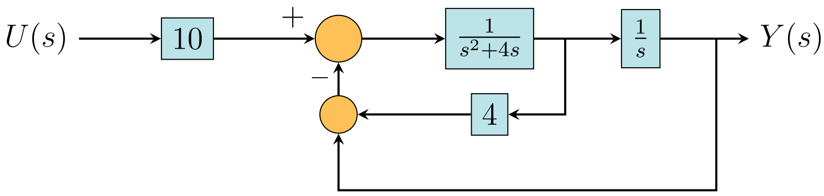


Tout d'abord on réduit la boucle de rétroaction la plus imbriquée :

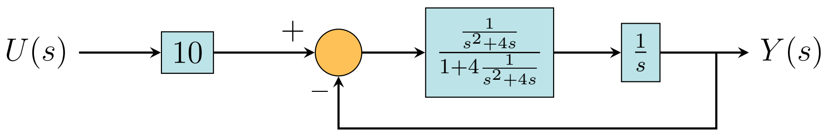


Puis, en appliquant la règle de mise en série des blocs, on obtient la fonction de transfert intermédiaire suivante :

$$H_1(s) := \frac{\frac{1}{s}}{1 + 4 \times \frac{1}{s}} \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2 + 4s}.$$



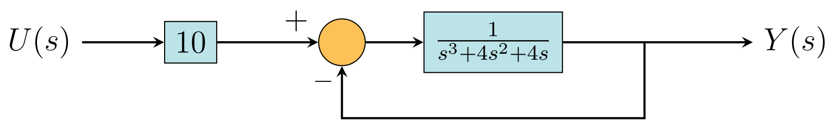
Ensuite, on réduit la deuxième boucle interne :



Remarquons à présent que :

$$H_2(s) := \frac{\frac{1}{s^2+4s}}{1+4\frac{1}{s^2+4s}} \times \frac{1}{s} = \frac{1}{s^3+4s^2+4s},$$

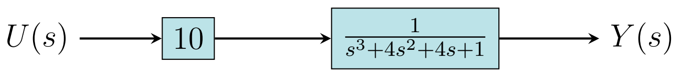
ainsi on a comme schéma équivalent le schéma à boucle de rétroaction unitaire suivant :



Et ainsi on réduit la boucle unitaire en posant :

$$H_3 := \frac{H_2(s)}{1+1\times H_2(s)} = \frac{\frac{1}{s^3+4s^2+4s}}{1+\frac{1}{s^3+4s^2+4s}} = \frac{1}{s^3+4s^2+4s+1},$$

ce qui donne :



Finalement on obtient le schéma bloc équivalent suivant après mise en série de l'ultime bloc :